

معادله درجه دوم: $ax^2 + bx + c = 0$
یک معادله درجه دوم کامل تمام ضرایب را دارد.

نکته ۱: برای حل ابتدا دلتا (Δ) می‌گیریم که عدد آن سه حالت دارد.

الف) $\Delta > 0$ دو ریشه دارد $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ $\Delta = b^2 - 4ac$
ب) $\Delta = 0$ ریشه مضاعف $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$
ج) $\Delta < 0$ ریشه حقیقی ندارد.

نکته ۲: اگر مجموع ضرایب صفر شود می‌توان راه سریعتری برای به دست آوردن ریشه‌ها بکار برد.

$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow a + b + c = 0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ c/a \end{cases}$

نکته ۳: اگر ضریب x^2 به علاوه عدد ثابت به‌طور غریب x می‌توان از راه دیگری استفاده کرد.

$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow a + c = b \rightarrow \begin{cases} -1 \\ -c/a \end{cases}$

نکته ۴: یک معادله درجه دوم ناقص معادله‌ای است که یکی از ضرایب a, b, c را نداشته باشد.

الف) $b = 0$ $ax^2 + c = 0$ $x^2 = -c/a \rightarrow x = \pm \sqrt{-c/a}$
(به ششلی که a, c مختلف علامه باشند.)

ب) $c = 0$ $ax^2 + bx = 0$ $x(ax + b) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-b/a \end{cases}$

مثال $3x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}}$

$3x^2 + 4 = 0 \rightarrow x^2 = -\frac{4}{3}$ جواب ندارد

$4x^2 + 11x = 0$ $x(4x + 11) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{11}{4} = -2.75 \end{cases}$

روابط بین ریشه‌های یک معادله درجه دوم

$$ax^2 + bx + c = 0 \begin{cases} \rightarrow x_1 \\ \rightarrow x_2 \end{cases}$$

(۵) نکته: مجموع ریشه برابر است با $-\frac{b}{a}$ و با S نمایش می‌دهند.

(۶) نکته: حاصل ضرب ریشه برابر است با $\frac{c}{a}$ و با P نمایش می‌دهند.

(۷) نکته: مجموع مربعات دوریه برابر $S^2 - 2P$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \Rightarrow S^2 - 2P$$

(۸) نکته: مجموع مکعبات دوریه برابر $S^3 - 3PS$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3PS$$

(۹) نکته: مجموع توان ۴ دوریه $(S^2 - 2P)^2 - 2P^2$

(۱۰) نکته: تفاضل دوریه البته تدوطلق آن (مشتت مثبت) برابر با $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

(۱۱) نکته: مجموع عکس ریشه‌ها $\frac{S}{P}$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1x_2} = \frac{S}{P}$$

تذکر: در کل باید کاری کنیم که به حاصل ضرب و حاصل جمع تبدیل شود پس جای آن‌ها S و P بگذاریم.

(۱۲) نکته: اگر دوریه از یک معادله درجه دوم معلوم بود و نخواهیم معادله درجه دوم بنویسیم از فرمول زیر استفاده می‌کنیم

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$S = x_1 + x_2$$

$$P = x_1 \cdot x_2$$

معادله درجه دوم پاراتری : یک معادله درجه دوم را زمانی پاراتری گویند که ضرایب معادله معلوم نباشد.

مثال: $mx^2 + x - 3 = 0$

$$2mx^2 + (m+1)x - 1 = 0$$

$$m^2x^2 - mx + 2m - 4 = 0$$

(۱۳) نکته: در یک معادله درجه دوم پاراتری اگر a قرینه هم باشد، $b = 0$ باشد.

(۱۴) نکته: در یک معادله درجه دوم پاراتری اگر a عکس هم باشد، $a = c$ باشد.

(۱۵) نکته: در یک معادله درجه دوم پاراتری اگر a عکس قرینه هم باشد، $a = -c$ باشد.

(۱۶) نکته: اگر یکی از ضرایب k برابر دیگری باشد.

$$\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$$

(۱۷) نکته: اگر یکی از ضرایب معلوم بود، پاراتری را می‌خواستند، ابتدا به جای x ها مقدار x را قرار داده و پاراتری را به دست می‌آوریم.

(۱۸) نکته: معادله درجه دوم را خواستند ابتدا پاراتری را به دست آورده و x_1, x_2 قرار داده و $x_1 + x_2$ را به دست می‌آوریم.

البته باید یادآوری کنیم که x_1 همان x_2 اولی می‌باشد.

(۱۹) نکته: شرط مختلف علامه بودن درجه آن است که $\frac{c}{a}$ منفی باشد. $\frac{c}{a} < 0$

(۲۰) نکته: شرط هم علامت بودن درجه آن است که $\frac{c}{a}$ مثبت باشد. $\frac{c}{a} > 0$

(۲۱) نکته: شرط آنکه درجه یک معادله درجه دوم همواره منفی باشد این است که $\Delta < 0$.

$$\Delta < 0 \text{ و } \Delta < 0$$

(۲۲) نکته: بنابراین شرط همواره مثبت بودن این است که هم $\Delta < 0$ باشد، هم $\Delta < 0$ باشد.

سهمی: نمودار یک معادله درجه دوم می باشد.

نکته (۲۳): فرم استاندارد آن به صورت $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ می باشد. که در آن:

الف) x_0 قعرینه
 y_0 خود

ب) $a > 0$ Min  $a < 0$ Max 

ج) $x = x_0$ خط محورتعان

نکته (۲۴): فرم گسترده آن به صورت $y = ax^2 + bx + c$ می باشد، که در آن:

الف) $x_0 = -\frac{b}{2a}$
 $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$

ب) $a > 0$ Min  $a < 0$ Max 

ج) $x = x_0 = -\frac{b}{2a}$ خط محورتعان

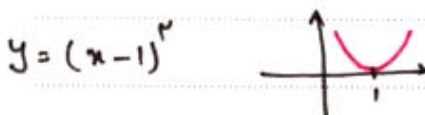
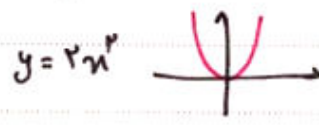
نکته (۲۵): برای رسم کامنیت راس سهمی را بدست آورده و در یک جدول در قسمت x ها یک واحد بالاتر و یک واحد پایین تر می نویسیم در منحنی قرار داده تا y آن بدست آید پس رسم می کنیم.



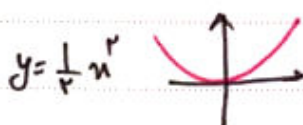
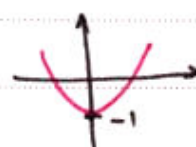
نکته (۲۶): انتقال یک نمودار سهمی



$y = x^2 + 1$



$y = x^2 - 1$



ریاضی	معادله درجه دوم	نمودار و تنظیم: اشکان صفائی
	$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ $b = b' \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$	
	$1) \quad c = 0, \quad a, b \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{b}{a} \end{cases}$	
	$2) \quad b = c = 0, \quad a \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$	
	$3) \quad a + b + c = 0 \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{c}{a}$	
	$4) \quad a + c = b \quad x_1 = -1, \quad x_2 = -\frac{c}{a}$	
	$5) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1 x_2 = P \end{cases} \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$	
	$6) \quad x_1 = \alpha + \sqrt{\beta} \xrightarrow{\text{ضرب در } -1} x_2 = \alpha - \sqrt{\beta}$	
	$7) \quad a \rightarrow 0, \quad b, c \neq 0 \quad \text{ریشه به سمت بینهایت}$	
	$8) \quad a, b \rightarrow 0, \quad c \neq 0 \quad \text{هر دو ریشه به سمت بینهایت}$	
	$9) \quad \begin{cases} \alpha f(\alpha) > 0 \quad \text{ریشه دو } \alpha \text{ خارج } \alpha \\ \alpha f(\alpha) < 0 \quad \text{ریشه دو } \alpha \text{ بین } \alpha \end{cases}$	
	$10) \quad \Delta > 0 \quad \begin{cases} \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} > 0 & \text{هر دو ریشه +} \\ -\frac{b}{a} < 0 & \text{هر دو ریشه -} \end{cases} \\ \frac{c}{a} < 0 \quad \text{دو ریشه مختلف علامه} \end{cases}$	
	$11) \quad \Delta = 0 \Rightarrow x_1, x_2 = -\frac{b}{2a}$	
	$12) \quad \Delta < 0 \Rightarrow \text{ریشه حقیقی ندارد}$	
	$13) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = S \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = P \\ x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{ a } \\ x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P \\ x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3SP \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{S}{P} \end{cases} \quad \text{قوانین ریشهها}$	
	$14) \quad \frac{c}{a} < 0, b = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$	
	$15) \quad \Delta > 0, a = c \Rightarrow x_1 = \frac{1}{x_2}$	
	$16) \quad a = -c, \frac{c}{a} = -1 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{x_2}$	
	$17) \quad x_1 = Kx_2 \Rightarrow \frac{b^2}{ac} = \frac{(K+1)^2}{K}$	
	$18) \quad x \rightarrow -x \Rightarrow ax^2 - bx + c = 0$	
	$19) \quad x \rightarrow \frac{1}{x} \Rightarrow cx^2 + bx + a = 0$	
	$20) \quad x \rightarrow -\frac{1}{x} \Rightarrow cx^2 - bx + a = 0$	
	$21) \quad x \rightarrow \frac{x}{k} \Rightarrow cx^2 + b k x + c k^2 = 0$	
	$22) \quad x \rightarrow x + k \Rightarrow c(x - k)^2 + b(x - k) + c = 0$	
	$23) \quad x \rightarrow x - k \Rightarrow c(x + k)^2 + b(x + k) + c = 0$	